

POINTS D'ARRÊT

Les coordonnées cylindriques (r_i, θ_i) des points d'arrêt :

• $N(Z) = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{Z^2}\right) - i \frac{\Gamma}{2\pi Z} = (V_r - i V_\theta) e^{-i\theta} = 0 \quad (1) \quad (V_i)$

• $V_r = V_r(r, \theta) = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta = 0 \quad (2)$

• $V_\theta = V_\theta(r, \theta) = -V_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0 \quad (3)$

$V_r = 0 \Rightarrow$

$r = a$

$\downarrow V_\theta = 0$

$-2V_\infty \sin \theta_i + \frac{\Gamma}{2\pi a} = 0$
 $\Rightarrow \sin \theta_i = \frac{\Gamma}{4\pi a V_\infty}$

CAS 1: $\Gamma > 0$
 $\Rightarrow 0 < \sin \theta \leq 1$
 $\Rightarrow 0 < \Gamma \leq 4\pi a V_\infty$
 \Rightarrow Points d'arrêt: **1, 2.**
 • Si $\Gamma = 4\pi a V_\infty$
 $\Rightarrow \sin \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$
 \Rightarrow Point d'arrêt: **7**

CAS 2: $\Gamma = 0$
 $\Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ et π
 \Rightarrow Points d'arrêt: **3, 4**

CAS 3: $\Gamma < 0$
 $\Rightarrow -1 \leq \sin \theta < 0$
 $\Rightarrow -4\pi a V_\infty \leq \Gamma < 0$
 \Rightarrow Points d'arrêt: **5, 6**
 • Si $\Gamma = -4\pi a V_\infty$
 $\Rightarrow \sin \theta = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$
 \Rightarrow Point d'arrêt: **8**

$V_\theta = 0 \Rightarrow$

$\theta = \pi/2$

$\downarrow V_r = 0$

$-V_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0$
 $\Rightarrow r^2 - \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} r + a^2 = 0$
 Posons: $A = \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty} \Rightarrow \Gamma = 4\pi A V_\infty$
 $\Rightarrow r^2 - 2A r + a^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4(A^2 - a^2)$
 $\Rightarrow r = A \pm \sqrt{A^2 - a^2}$, en divisant par a :
 $\frac{r}{a} = \frac{A}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1}$
 Posons $X = \frac{A}{a}$ et $Y = \frac{r}{a}$:
 $Y = X \pm \sqrt{X^2 - 1}$; $\Delta = 4(X^2 - 1)$

• $\Delta = 0 \Rightarrow X^2 - 1 = 0 \Rightarrow X^2 = 1$:
 1. $X = \frac{A}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi a V_\infty} = 1 \Rightarrow Y = \frac{r}{a} = 1$; Point d'arrêt **7**.
 2. $X = \frac{A}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi a V_\infty} = -1 \Rightarrow Y = \frac{r}{a} = -1 < 0$

• $\Delta > 0 \Rightarrow X^2 - 1 > 0 \Rightarrow X^2 > 1$:
 1. $X = \frac{A}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi a V_\infty} > 1$
 2. $X = \frac{A}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi a V_\infty} < -1$

Point d'arrêt 9 (à l'extérieur du cercle $r = a$).
 $Y = X + \sqrt{X^2 - 1}$

Point d'arrêt 7

$X = \frac{A}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi a V_\infty}$

Point d'arrêt 8 (à l'intérieur du cercle $r = a$).
 $Y = X - \sqrt{X^2 - 1}$

$\Gamma < 0$ pas de solution.

TABLEAU SUR 2 pages.
 LÉZÉ - LEROND Fabrice.

