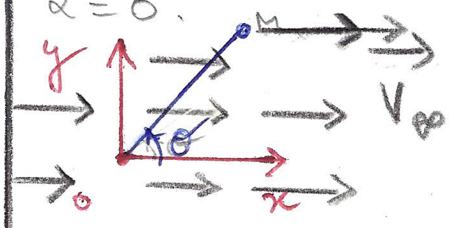
Ecoulement autour d'un cylindre (avec circulation) :

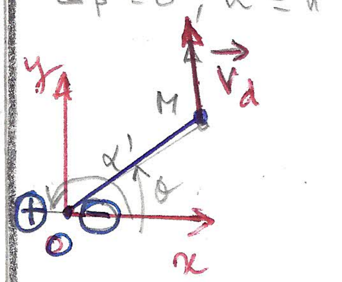
Ecoulement uniforme plan : $\alpha = 0$.



$$F(Z) = V_\infty Z = V_\infty r e^{i\theta} = r V_\infty (\cos\theta + i \sin\theta) = \underbrace{r V_\infty \cos\theta}_{\phi_p} + i \underbrace{r V_\infty \sin\theta}_{\psi_p}$$

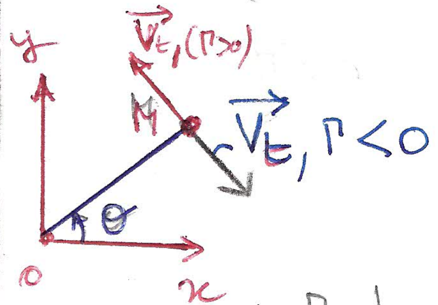
Doublet

$Z_p = 0 \; ; \; \alpha' = \pi$



$$F(Z) = -\frac{m}{Z} = -\frac{m}{r} e^{-i\theta} = -\frac{m}{r}(\cos\theta - i \sin\theta) = \underbrace{-\frac{m}{r}\cos\theta}_{\phi_d} + i \underbrace{\frac{m}{r}\sin\theta}_{\psi_d}$$

Tourbillon



$$F(Z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln Z = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln (r e^{i\theta}) = \underbrace{+\frac{\Gamma}{2\pi}\theta}_{\phi_t} + i \underbrace{\left(-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r\right)}_{\psi_t}$$

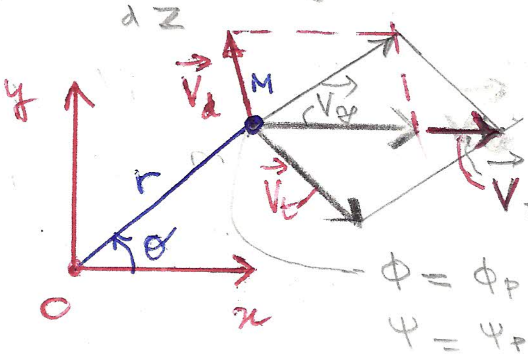
$$F(Z) = V_\infty Z - \frac{m}{Z} - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

$$= \underbrace{\left[\left(r V_\infty - \frac{m}{r}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta\right]}_{\phi} + i \underbrace{\left[\left(r V_\infty + \frac{m}{r}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r\right]}_{\psi}$$

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \left(V_\infty + \frac{m}{r^2}\right)\cos\theta = \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad (\Gamma < 0)$$

$$V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\left(V_\infty - \frac{m}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$V(Z) = \frac{dF(Z)}{dZ} = (V_r - i V_\theta)\, e^{-i\theta}$$



$$\vec{V} = \vec{V_\infty} + \vec{V_d} + \vec{V_t}$$

$$\phi = \phi_p + \phi_d + \phi_t$$

$$\psi = \psi_p + \psi_d + \psi_t$$

LÉZÉ - LERONA Fabrice.

C.L. Recherche des points au niveau desquels $V_r = 0, \forall \theta$:

$$V_\infty + \frac{m}{r^2} = 0 \quad \text{ou} \quad r^2 V_\infty + m = 0 \quad (1)$$

$\Rightarrow r^2 = -\dfrac{m}{V_\infty}$ $\quad \left(m = \dfrac{-\mu}{2\pi h} \right.$, avec $h = 1$ si Q débit par unité d'épaisseur).

Sur le contour circulaire de centre O, la vitesse $V_r = 0$.

Notons $r = a$, le rayon de ce contour.

Donc $\boxed{a^2 V_\infty + m = 0}$ et

- $V_r = \left(V_\infty - \dfrac{a^2 V_\infty}{r^2} \right) \cos\theta = V_\infty \left(1 - \dfrac{a^2}{r^2} \right) \cos\theta = V_r(r,\theta)$
- $V_\theta = -\left(V_\infty + \dfrac{a^2 V_\infty}{r^2} \right) \sin\theta + \dfrac{\Gamma}{2\pi r} = -V_\infty \left(1 + \dfrac{a^2}{r^2} \right) \sin\theta + \dfrac{\Gamma}{2\pi r}$
- $\Psi = \left(r V_\infty - \dfrac{a^2 V_\infty}{r} \right) \sin\theta - \dfrac{\Gamma}{2\pi} \ln r \qquad (\Gamma < 0)$

$$= r V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

Au niveau des points situés sur le contour de rayon $r = a$, la fonction de courant est égale à :

$$\Psi = \underbrace{a V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{a^2} \right) \sin\theta}_{0} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln a = \text{constante}$$

Afin que sa valeur soit égale à 0 le long du contour, ajoutons $\dfrac{\Gamma}{2\pi} \ln a$ à Ψ, d'où :

$$\Psi = r V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a} \right) \qquad (\Gamma < 0)$$

LEZÉ - LEROND Fabrice