

Écoulement autour d'un cylindre (avec circulation)

Ecoulement uniforme plan:
 $\alpha = 0$

$$F(z) = V_\infty z$$

$$= V_\infty r e^{i\theta}$$

$$= r V_\infty (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= \underbrace{r V_\infty \cos \theta}_{\phi_p} + i \underbrace{r V_\infty \sin \theta}_{\psi_p}$$

Doublet
 $z_p = 0; \alpha' = \pi$

$$F(z) = -\frac{m}{z}$$

$$= -\frac{m}{r} e^{-i\theta}$$

$$= -\frac{m}{r} (\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$= \underbrace{-\frac{m}{r} \cos \theta}_{\phi_d} + i \underbrace{\frac{m}{r} \sin \theta}_{\psi_d}$$

Tourbillon
 $\Gamma < 0$

$$F(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$$= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln (r e^{i\theta})$$

$$= \underbrace{+\frac{\Gamma}{2\pi} \theta}_{\phi_t} + i \underbrace{\left(-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r\right)}_{\psi_t}$$

$$F(z) = V_\infty z - \frac{m}{z} - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$$= \underbrace{\left[\left(r V_\infty - \frac{m}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \right]}_{\phi} + i \underbrace{\left[\left(r V_\infty + \frac{m}{r} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \right]}_{\psi}$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \left(V_\infty + \frac{m}{r^2} \right) \cos \theta = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (\Gamma < 0)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - \left(V_\infty - \frac{m}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} = - \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$V(z) = \frac{dF(z)}{dz} = (v_r - i v_\theta) e^{-i\theta}$$

$$V = V_\infty + V_d + V_t$$

$$\phi = \phi_p + \phi_d + \phi_t$$

$$\psi = \psi_p + \psi_d + \psi_t$$

C.L. Recherche des points au niveau desquels $V_r = 0, \forall \theta$:

$$V_\infty + \frac{m}{r^2} = 0 \quad \text{ou} \quad r^2 V_\infty + m = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow r^2 = -\frac{m}{V_\infty} \quad (m = \frac{-\Gamma}{2\pi h} \text{ avec } h=1 \text{ si } \Gamma \text{ débit par unité d'épaisseur}).$$

Sur le contour circulaire de centre O, la vitesse $V_r = 0$.

Notons $r = a$, le rayon de ce contour.

Donc $\boxed{a^2 V_\infty + m = 0}$ et

$$\bullet V_r = -\left(V_\infty - \frac{a^2 V_\infty}{r^2}\right) \cos \theta = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta = V_r(r, \theta)$$

$$\bullet V_\theta = -\left(V_\infty + \frac{a^2 V_\infty}{r^2}\right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} = -V_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$\bullet \psi = \left(r V_\infty - \frac{a^2 V_\infty}{r}\right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (\Gamma < 0)$$

$$= r V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

Au niveau des points situés sur le contour de rayon $r = a$, la fonction de courant est égale à :

$$\psi = a V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{a^2}\right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln a = \text{constante}$$

Afin que sa valeur soit égale à 0 le long du contour, ajoutons $\frac{\Gamma}{2\pi} \ln a$ à ψ , d'où :

$$\psi = r V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{a}\right) \quad (\Gamma < 0)$$

